

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
CLASA a VI-a

Subiectul 1. Arătați că numărul $a = 2^{26} + 2^{24} + 2^{20}$ este pătrat perfect, iar numărul $b = 3^{26} - 3^{24}$ este cub perfect.

Subiectul 2. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 = 5^a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x + 1 = 13^b, b \in \mathbb{N}\}$.
Calculați $A \cap B$.

Subiectul 3. Fie unghiurile adiacente complementare $\angle AOB$ și $\angle BOC$ și punctul $D \in \text{Int}(\angle AOB)$, cu $\angle AOD \equiv \angle DOB$. Bisectoarele unghiurilor $\angle BOC$ și $\angle BOD$ formează un unghi cu măsura de 35° .

a) Calculați măsurile unghiurilor $\angle AOB$ și $\angle BOC$;

b) Fie $F \in OB, O \in (BF)$ și punctul E astfel încât $m(\angle AOE) > m(\angle EOC)$ și $m(\angle DOE) = 90^\circ$.
Calculați măsura unghiului $\angle EOF$.

Subiectul 4. Pe segmentul $[AB]$ se consideră punctele $A_1, A_2, \dots, A_9$, în această ordine, astfel încât $AA_1 = 1\text{ cm}, A_1A_2 = 3\text{ cm}, A_2A_3 = 5\text{ cm}, A_3A_4 = 7\text{ cm}, A_4A_5 = 9\text{ cm}, A_5A_6 = 11\text{ cm}, A_6A_7 = 13\text{ cm}, A_7A_8 = 15\text{ cm}, A_8A_9 = 17\text{ cm}, A_9B = 19\text{ cm}$. Fie punctul M mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Arătați că $AB = 100\text{ cm}$;

b) Arătați că $M \in [A_7A_8]$ și că $A_8M = 14 \cdot A_7M$;

c) Din punctele A și B pornesc, în același timp, unul spre celălalt, câte un melc, primul (cel din A) cu viteza de 2 dm/h , iar cel de-al doilea (cel din B) cu viteza de 3 dm/h . Arătați că cei doi melci se vor întâlni într-un punct P situat pe segmentul $[A_6A_7]$ și $A_6P < A_7P$.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022
BAREM DE CORECTARE CLASA A VI-A**

Subiectul 1. Arătați că numărul $a = 2^{26} + 2^{24} + 2^{20}$ este pătrat perfect, iar numărul $b = 3^{26} - 3^{24}$ este cub perfect.

Soluție: $a = 2^{26} + 2^{24} + 2^{20} = 2^{20} (2^6 + 2^4 + 1) = 2^{20} \cdot 81 = (2^{10} \cdot 9)^2$, deci este pătrat perfect.....4 p

$b = 3^{26} - 3^{24} = 3^{24} (3^2 - 1) = 3^{24} \cdot 8 = (3^8 \cdot 2)^3$, deci este cub perfect.....3 p

Subiectul 2. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 3 = 5^a, a \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x + 1 = 13^b, b \in \mathbb{N}\}$.
Calculați $A \cap B$.

Soluție: $x + 3 = 5^a, a \in \mathbb{N} \Rightarrow 5x + 15 = 5^{a+1} \Rightarrow 5x = 5^{a+1} - 15, a \in \mathbb{N}$ 2 p

$5x + 1 = 13^b, b \in \mathbb{N} \Rightarrow 5x = 13^b - 1, b \in \mathbb{N}$ 1 p

Deci, $5^{a+1} - 15 = 13^b - 1 \Rightarrow 5^{a+1} - 13^b = 14$ 1 p

Dar $5^{a+1} = (4+1)^{a+1} = M_4 + 1, 13^b = (12+1)^b = M_4 + 1$ 1 p

$\Rightarrow 5^{a+1} - 13^b = M_4$ 1 p

$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$ 1 p

Subiectul 3. Fie unghiurile adiacente complementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ și punctul $D \in \text{Int}(\sphericalangle AOB)$,
cu $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle DOB$. Bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle BOD$ formează un unghi cu măsura de
 35° .

a) Calculați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$;

b) Fie $F \in OB, O \in (BF)$ și punctul E astfel încât $m(\sphericalangle AOE) > m(\sphericalangle EOC)$ și $m(\sphericalangle DOE) = 90^\circ$.

Calculați măsura unghiului $\sphericalangle EOF$.

Soluție: a) Din $\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle DOB \Rightarrow (OD \text{ bisectoarea unghiului } \sphericalangle AOB)$ 1 p

Notăm $\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOB = u^\circ$, (OP -bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD \Rightarrow \sphericalangle DOP = \sphericalangle POB = \frac{u^\circ}{2}$

Fie (OQ -bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC \Rightarrow \sphericalangle BOQ = \sphericalangle QOC = v^\circ$ 1 p

Din ipoteză $\sphericalangle POQ = 35^\circ = \frac{u^\circ}{2} + v^\circ \Rightarrow u^\circ + 2v^\circ = 70^\circ$ 1 p

Dar $2u^\circ + 2v^\circ = 90^\circ \Rightarrow u^\circ = 20^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOB = 40^\circ, \sphericalangle BOC = 50^\circ$ 1 p

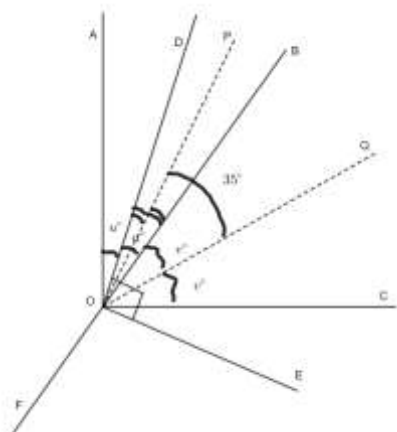


60 de ani

Colegiul Național
„Vasile Lucaciu”



MINISTERUL EDUCAȚIEI



- b) $\angle AOE = \angle EOC$, $\angle DOE = 90^\circ \Rightarrow E$ este de aceeași parte cu C față de AO **1 p**
 $\angle DOE = 90^\circ \Rightarrow \angle COE = \angle DOE - \angle DOB - \angle BOC = 90^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 20^\circ$ **1 p**
 $\angle BOF$ unghi alungit $\Rightarrow \angle EOF = \angle BOF - \angle BOC - \angle COE = 180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$ **1 p**

Subiectul 4. Pe segmentul $[AB]$ se consideră punctele $A_1, A_2, \dots, A_9$, în această ordine, astfel încât $AA_1 = 1\text{cm}$, $A_1A_2 = 3\text{cm}$, $A_2A_3 = 5\text{cm}$, $A_3A_4 = 7\text{cm}$, $A_4A_5 = 9\text{cm}$, $A_5A_6 = 11\text{cm}$, $A_6A_7 = 13\text{cm}$, $A_7A_8 = 15\text{cm}$, $A_8A_9 = 17\text{cm}$, $A_9B = 19\text{cm}$. Se consideră punctul M mijlocul segmentului $[AB]$.

a) Arătați că $AB = 100\text{cm}$;

b) Arătați că $M \in [A_7A_8]$ și că $A_8M = 14A_7M$;

c) Din punctele A și B pornesc, în același timp, unul spre celălalt, câte un melc, primul (cel din A) cu viteza de 2 dm/h , iar cel de-al doilea (cel din B) cu viteza de 3 dm/h . Arătați că cei doi melci se vor întâlni într-un punct P situat pe segmentul $[A_6A_7]$ și $A_6P < A_7P$.

Soluție: a) $AB = AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_9B = 1\text{cm} + 3\text{cm} + \dots + 19\text{cm} = 100\text{cm}$ **1 p**

b) M mijlocul segmentului $[AB]$, deci $AM = MB = 50\text{cm}$

$AM = 50\text{cm} = 1\text{cm} + 3\text{cm} + 5\text{cm} + 7\text{cm} + 9\text{cm} + 11\text{cm} + 13\text{cm} + 1\text{cm}$ **1 p**

$AM = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 + A_6A_7 + A_7M$

$\Rightarrow A_7M = 1\text{cm}$, deci $M \in [A_7A_8]$ **1 p**

$A_7A_8 = 15\text{cm} \Rightarrow MA_8 = 14\text{cm} \Rightarrow A_8M = 14A_7M$ **1 p**

c) Într-o oră cei doi melci parcurg $5\text{ dm} = 50\text{ cm}$, deci distanța $AB = 100\text{ cm}$ va fi parcursă în două ore (cei doi melci se vor întâlni după două ore). Melcul din A parcurge două părți, iar melcul din B parcurge 3 părți. Cum $AB = 100\text{ cm}$, atunci această distanță este parcursă astfel: melcul din A , care parcurge două părți, va parcurge distanța $AP = 40\text{ cm}$, iar cel din B parcurge trei părți, deci $BP = 60\text{ cm}$ **2 p**

$AP = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 + A_6P$

$AP = 40\text{cm} = 1\text{cm} + 3\text{cm} + 5\text{cm} + 7\text{cm} + 9\text{cm} + 11\text{cm} + A_6P \Rightarrow$

$A_6P = 40\text{cm} - 36\text{cm} = 4\text{cm} < A_6A_7 \Rightarrow P \in [A_6A_7]$ și $A_7P = A_6A_7 - A_6P = 13\text{cm} - 4\text{cm} = 9\text{cm}$

$\Rightarrow A_6P < A_7P$ **1 p**



Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poștal 430282

Telefon și fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630

Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro